

Cálculo numérico

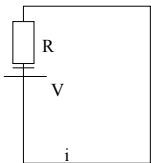
Professor Walter Cunha

Representação numérica

Um conjunto de **ferramentas** ou **métodos** usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma **aproximada**. Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma solução exata, portanto precisam ser resolvidos **numericamente**.

Exemplo

Um circuito elétrico composto de uma fonte de tensão e um resistor. Desejamos obter a corrente que circula no circuito, dado o valor da tensão V e da resistência R .



Lei de Kirchoff

$$V = R \cdot i$$

Ou seja, $i = V / R$

Para $V=10\text{ V}$ e $R=100\ \Omega$, $i=0,1\text{ a.}$

Exemplos

Porém, digamos que um outro componente eletrônico seja incluído no circuito: um diodo semiconductor. Esse dispositivo tem uma curva característica, isto é, a tensão nesse componente em função da corrente, que é dada por:

$$v(i) = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right)$$

Resulta na seguinte equação:

$$V - R \cdot i - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right) = 0$$

Exemplos

Tornou-se difícil se obter uma expressão para i , principalmente quando comparado ao caso anterior, quando tínhamos simplesmente $i=V/R$.

A solução está na utilização de métodos numéricos que serão aprendidos neste curso.

Pontos Importantes

- **Escolher o método** a ser utilizado, procurando aquele que é mais adequado para o seu problema. Que vantagens cada método oferece e que limitações eles apresentam;
- **Saber avaliar a qualidade da solução obtida**. Para isso, é importante ele saber exatamente o que está sendo feito pelo computador ou calculadora, isto é, como determinado método é aplicado.

Objetivos

➤ Apresentar diversos métodos numéricos para a resolução de diferentes problemas matemáticos. Pretende-se deixar bem claro a importância desses métodos, mostrando:

- ✓ A essência de um método numérico;
- ✓ A diferença em relação a soluções analíticas;
- ✓ As situações em que eles devem ser aplicados;
- ✓ As vantagens de se utilizar um método numérico;
- ✓ As limitações na sua aplicação e confiabilidade na solução obtida.

Objetivos

- Melhorar a familiarização e “intimidade” do aluno com a matemática, mostrando seu lado prático e sua utilidade no dia-a-dia de um engenheiro.
- Apresentar ao aluno maneiras práticas de se desenvolver e utilizar métodos numéricos.
- Treinar o aluno a aprender outros métodos numéricos por conta própria. No seu dia-a-dia profissional, ele pode se deparar com um problema cuja solução depende de um método numérico que não foi visto no curso.

Exemplos

Qual o valor de $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1,41 \text{ ou } 1,4142 \text{ ou ainda } 1,41421356237$$

Em uma máquina digital, como uma calculadora ou um computador, os números não são representados na base decimal. Eles são representados na base binária, ou seja, usam o número 2 como base. Na base binária existem somente 2 números: 0 e 1. Portanto, a base binária é usada porque essas máquinas utilizam-se de sinais elétricos, sendo o 0 para ausência de sinal e o número 1 a presença do sinal elétrico.

Ponto fixo e Ponto flutuante

Números inteiros – ponto fixo

Sinal	Dígitos
-------	---------

Números reais – ponto flutuante

Sinal	Mantissa	Posição ponto
-------	----------	---------------

$$\pm(0.d_1d_2d_3\dots d_t) \times b^e$$

$d_1d_2d_3\dots d_t$ é uma fração na base b , também chamada de **mantissa**, com $0 \leq d_i \leq b-1$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, t$, sendo t o número máximo de dígitos da mantissa e e é um expoente que varia em um intervalo dado pelos limites da máquina utilizada.

Ponto fixo e Ponto flutuante

Decimal	Ponto flutuante	Mantissa	Base	Exp
1532	0.1532×10^4	0.1532	10	4
15.32	0.1532×10^2	0.1532	10	2
0.00255	0.255×10^{-2}	0.255	10	-2
10	0.1×10^2	0.1	10	2

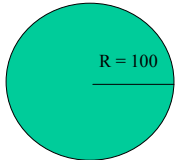
Linguagem de programação

- Em qualquer linguagem é possível especificar a representação que deve ser usada para os números a serem armazenados em uma dada variável. Na linguagem C, para **números inteiros** - *int* 2 bytes => (-32768, 32767).

No caso da representação de **ponto flutuante** - *float* => número máximo de dígitos na base binária igual a 24 ($t=24$) e expoente entre -126 e 127. Portanto, uma variável declarada como *float* pode armazenar números reais entre $\sim 10^{-38}$ e $\sim 10^{38}$.

Erro numérico

Cálculo da área de um círculo:



O primeiro passo é formular um **modelo matemático** para o nosso **sistema físico** e encontrar a solução do problema representado por esse modelo.

$$A = \text{Pi} R^2$$

31400

31416

31415,92654

Erro numérico

Qual o valor correto?

Depende da confiabilidade esperada !

Erro absoluto = Valor real – Valor aproximado

Quanto < erro > precisão

Erro numérico

Se o resultado de uma operação é $2.123.542,7$ e o valor esperado era $2.123.544,5$.

O erro absoluto neste caso é $1,8$. Comparada com o valor real, essa diferença é bem pequena, portanto, podemos considerar o resultado preciso.

Se o resultado de uma operação é $0,234$ e o resultado esperado era $0,128$. Desta vez o erro absoluto será igual a $0,106$, porém o resultado é bastante impreciso.

Erro relativo = erro absoluto / valor real

Erro numérico

Nos exemplos anteriores qual o erro relativo de cada resultado?

No primeiro caso o erro relativo é de:
 $0,0000008$ ou $0,00008\%$

No segundo caso o relativo é de:
 $0,83$ ou 83% .

Tipos de erro

Toda medida experimental apresenta uma incerteza. A solução do problema será influenciada pela mesma.

Portanto, logo de início, existem diversos fatores que introduzem incertezas na solução numérica do problema. Esse tipo de erro é chamado de **erro inicial**.

Erro inicial: Erro gerado no momento de uma medição realizada através de um instrumento.

Tipos de erro

A inevitável limitação na representação de números irracionais, introduz erros no resultado.

Esse tipo de erro é chamado de **erro de arredondamento**.

como mostrado anteriormente: $\sqrt{2}$

Erro de arredondamento: Erro gerado pela aproximação de um resultado devido a dificuldade de representação.

Tipos de erro

O cálculo do valor de e^x . Como a *exponencial* é uma função que pode ser representada por uma série infinita dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \Lambda + \frac{x^n}{n!} + \Lambda$$

Portanto, mais uma vez, teremos que fazer uma aproximação, que levará a um erro no resultado final de e^x .

Neste caso, faremos um **truncamento** dessa série.

Erro de truncamento: Erro gerado pelo truncamento de um resultado inexato.

Propagação e condicionamento

Vamos supor que queremos calcular: $\sqrt{2} - e^x$

O resultado da operação de subtração apresentará um erro que é proveniente dos erros nos valores de cada termo separadamente. Em outras palavras, os erros nos valores se **propagam** para o resultado.

Podemos concluir então que, ao se resolver um problema numericamente, a cada etapa e a cada operação realizada, devem surgir diferentes tipos de erros gerados das mais variadas maneiras, e estes erros se propagam e determinam o erro no resultado final obtido.

Propagação e condicionamento

O conceito de propagação de erros é muito importante pois, além de determinar o erro final de uma operação numérica, ele também determina a **sensibilidade** de um determinado problema ou método numérico.

Se uma pequena variação nos dados de entrada de um problema levar a uma grande diferença no resultado final, considera-se que essa operação é **mal-condicionada**, ou seja, existe uma grande propagação de erros nessa operação. Por outro lado, se uma pequena variação nos dados de entrada leva a apenas uma pequena diferença no resultado final, então essa operação é **bem-condicionada**.

Propagação e condicionamento

Operação mau-condicionada: Quando a operação não converge para um resultado confiável.

Operação bem-condicionada: Quando a operação converge para o resultado esperado.

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Computadores precisam representar os números com uma **quantidade finita de algarismos**.

Seja um sistema que opera com em aritmética de ponto flutuante de t dígitos na base 10, e seja x , escrito na forma:

$$X = fx \cdot 10^e + gx \cdot 10^{-t}$$

$$\text{onde } 0,1 \leq fx < 1 \quad \text{e } 0 \leq gx < 1$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Vamos considerar a base decimal ($b=10$) e uma mantissa de 4 algarismos ($t=4$).

O número 734,68, teríamos que truncar para $0,7346 \times 10^3$

$$fx = 0,7346 \quad \text{e} \quad gx = 0,8$$

erro absoluto de $0,8 \times 10^{-1}$

Generalizando: **erro** < b^{e-t}
(truncamento)

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

ou arredondar para $0,7347 \times 10^3$ com um erro de $0,2 \times 10^{-1}$

Generalizando:
(arredondamento) $erro < \frac{1}{2} \times b^{e-t}$

Portanto, para uma representação numérica com $t=53$ (como no caso da maioria dos computadores) esse erro é muito pequeno.

Apesar de pequeno, é importante lembrar que ele se **propagará** nas operações aritméticas realizadas pelo computador.

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

E o erro relativo ?

ERx = Erro Absoluto / X

$$\frac{gx * 10^{e-t}}{fx * 10^e} = \frac{gx * 10^{e-t}}{0,1 * 10^e} = gx * 10^{-t+1}$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Resumindo :

- | EA | < b^{e-t} (truncamento)
- | EA | < $\frac{1}{2} b^{e-t}$ (arredondamento)
- | ER | < b^{-t+1} (truncamento)
- | ER | < $\frac{1}{2} b^{-t+1}$ (arredondamento)

Propagação e condicionamento

Somando 6563 (= $0,6563 \times 10^4$) e 3,375 (= $0,3375 \times 10^1$) no nosso computador fictício de mantissa com 4 algarismos.

O valor 6566,375 será calculado $0,6566 \times 10^4 = 6566$.

A soma de dois números exatos, o resultado da soma não será exata. Mesmo pequeno, ao se propagar esse erro precisa ser considerado.

Exercícios

Seja um sistema que opera com em aritmética de ponto flutuante de $t = 4$ dígitos na base 10 calcule os erros absolutos e relativos por truncamento e arredondamento dos seguintes valores:

- a) 123,456
- b) $374,3 + 3,345$
- c) $124,34 + 0,1234$
- d) $22,12 * 0,123$
- e) $0,3212 * 12,32$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de Soma:

$$EA \Rightarrow x + y = X + EA_x + Y + EA_y = (X + Y) + EA_x + EA_y$$

$$EA_{x+y} = EA_x + EA_y$$

$$ER_{x+y} = \frac{EA_{x+y}}{X+Y} = \frac{EA_x}{X} \left(\frac{X}{X+Y} \right) + \frac{EA_y}{Y} \left(\frac{Y}{X+Y} \right)$$

$$ER_{x+y} = ER_x \left(\frac{X}{X+Y} \right) + ER_y \left(\frac{Y}{X+Y} \right)$$

Exercícios

- 1) Demonstre o erro absoluto e relativo para a operação de subtração
- 2) Demonstre o erro absoluto e relativo para a operação de multiplicação

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de Subtração:

$$EA \Rightarrow x - y = X + EA_x - Y + EA_y = (X - Y) + EA_x - EA_y$$

$$EA_{x-y} = EA_x - EA_y$$

$$ER_{x-y} = \frac{EA_{x-y}}{X - Y} = \frac{EA_x}{X} \left(\frac{X}{X - Y} \right) - \frac{EA_y}{Y} \left(\frac{Y}{X - Y} \right)$$

$$ER_{x-y} = ER_x \left(\frac{X}{X - Y} \right) - ER_y \left(\frac{Y}{X - Y} \right)$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de multiplicação:

$$x * y = (X + EA_x) * (Y + EA_y) =$$

$$X * Y + X * EA_y + Y * EA_x + EA_x * EA_y =$$

$$EA_{x*y} = X * EA_y + Y * EA_x + EA_x * EA_y, \text{ onde } EA_x * EA_y \Rightarrow 0$$

$$ER_{x*y} = \frac{X * EA_y + Y * EA_x}{X * Y} = \frac{EA_x}{X} + \frac{EA_y}{Y}$$

$$ER_{x*y} = ER_x + ER_y$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de divisão:

$$x / y = (X + EA_x) / (Y + EA_y) = \frac{(X + EA_x)}{Y} * \frac{Y}{(Y + EA_y)} =$$

$$\frac{(X + EA_x)}{Y} * \frac{1}{1 + \frac{EA_y}{Y}} \text{ considerando o 2º termo como uma série infinita, [Serie.doc](#)}$$

$$X / Y \cong \frac{(X + EA_x)}{Y} * \left(1 - \frac{EA_y}{Y} \right)$$

$$EA_{x/y} = \frac{Y * EA_x - X * EA_y}{Y^2}$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de divisão:

$$ER_{x/y} = \frac{(Y * EA_x - X * EA_y)}{Y^2} * \frac{Y}{X}$$

$$ER_{x/y} = \frac{EA_x}{X} - \frac{EA_y}{Y}$$

Exercícios

- 1) Considere um sistema com ponto flutuante de quatro dígitos e base decimal.

$$X = 0,7237 * 10^4 \quad Y = 0,2145 * 10^{-3} \quad Z = 0,2585 * 10^1$$

Calcule o resultado e o erro relativo de :

- a) $X + Y + Z$
- b) $X - Y - Z$
- c) X / Y
- d) $(X * Y) / Z$
- e) $X * (Y / Z)$

Exercícios

Converta para base decimal:

- a) 110010_2
- b) 3452_6
- c) 76342_7
- d) $1AC_{16}$

Converta para binário:

- a) 345_{10}
- b) $0,25_{10}$
- c) $0,1_{10}$

Faça as seguintes operações:

- a) $1100101_2 + 11111_2$
- b) $1100101_2 - 11111_2$
- c) $5453_6 + 2534_6$

Conversão para binário

Na conversão de números da base decimal para a base binária (usada por computadores) e vice-versa também ocorrem erros.

Um exemplo bastante peculiar é o número 0,1. Ao convertermos esse número da base decimal para a base binária obtemos como resposta:

$$(0,1)_{10} = (0,0001100110011\dots)_2$$

O que gera um truncamento.

$$\sum_{k=1}^{100} 0,1 \text{ não dará } 10$$

Conversão para binário

$$1/8 = 0,125 = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

$$1/9 = 0,111\dots = 1 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + \dots + 1 \times 10^{-\alpha}$$

$$R = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \dots + b_k \times 2^{-k}$$

onde $b_j = 0$ ou $1 \forall j$ e k tende a ∞ .

$$R = \sum_{k=1}^{\alpha} b_k \times 2^{-k}$$

$$2 \times R = b_1 + \sum_{k=1}^{\alpha} b_k \times 2^{-k}$$

Onde b_1 é a parte inteira em binário.

Exemplos

$$0,5_{(10)} = 5 \times 10^{-1}$$

$$2 \times 0,5 = 1 \Rightarrow 0,1_{(2)}$$

$$0,125_{(10)} = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

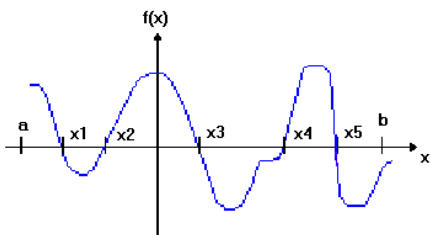
$$2 \times 0,125 = 0,25 \Rightarrow 0,0_{(2)}$$

$$2 \times 0,25 = 0,5 \Rightarrow 0,00_{(2)}$$

$$2 \times 0,5 = 1 \Rightarrow 0,001_{(2)}$$

Zero de Funções

Dada uma função $f(x)$, dizemos que α é raiz, ou zero de $f(x)$ se e somente $f(\alpha) = 0$



Zero de Funções

As raízes de uma função podem ser encontradas analiticamente, ou seja, resolvendo a equação $f(x) = 0$ de maneira exata, como mostrado nos exemplos a seguir:

1-) $f(x) = x - 3$

$$x = 3 \text{ é raiz de } f(x) \text{ pois :}$$

$$f(3) = 3 - 3 = 0$$

2-) $g(x) = \frac{8}{3}x - 4$

$$\frac{8}{3}x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ é a raiz de } g(x) \text{ pois :}$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} - 4 = 0$$

Zero de Funções

$$3-) h(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

tanto $x = 2$ quanto $x = 3$ são soluções de $h(x)$ pois :

$$h(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 \qquad h(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6$$

$$h(3) = 15 - 15 = 0 \qquad h(2) = 10 - 10 = 0$$

Zero de Funções

Porém, nem sempre é possível se encontrar analiticamente a raiz de uma função, como nos casos a seguir:

$$1-) f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$2-) g(x) = \text{sen}(x) + \text{ex}$$

$$3-) h(x) = x + \ln(x)$$

Zero de Funções

Nestes casos precisamos de um método numérico para encontrar **uma estimativa** para a raiz da função estudada, ou seja, um valor tão aproximado quando se deseje.

Tais métodos devem envolver as seguintes etapas:

- Determinação de um intervalo em x que contenha pelo menos uma raiz da função $f(x)$, ou seja, isolamento das raízes;
- Cálculo da raiz aproximada através de um processo iterativo até a precisão desejada.

Zero de Funções

Métodos iterativos:

Processos se caracterizam pela **repetição** de determinada operação. A idéia nesse tipo de processo é repetir determinado cálculo várias vezes, obtendo-se, a cada repetição ou **iteração**, um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior. A cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Zero de Funções

Estimativa inicial: para iniciar um processo iterativo, é preciso que se tenha uma estimativa inicial do resultado do problema.

Convergência: a cada iteração feita, o resultado deve ser mais próximo daquele esperado, isto é, é preciso estar bem condicionado.

Critério de parada: É preciso parar as iterações em um determinado instante. Para isso, devemos utilizar um certo critério, que vai depender do problema a ser resolvido e da precisão que precisamos obter na solução.

Zero de Funções

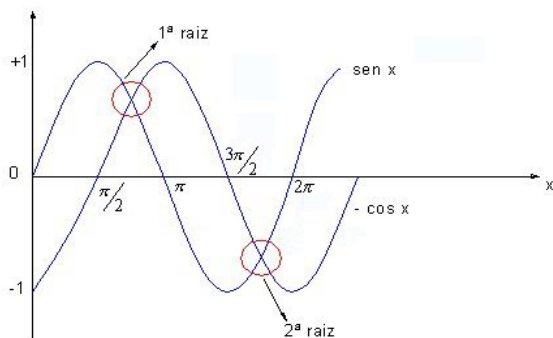
Isolamento de raízes:

Para determinarmos o número e a localização aproximada de raízes de uma função, a fim de obtermos uma estimativa inicial a ser usada nos processos iterativos, podemos examinar o comportamento dessa função através de um esboço gráfico.

Por exemplo, $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$

$$\text{sen}(x) + \cos(x) = 0, \text{ logo } \text{sen}(x) = -\cos(x)$$

Zero de Funções



Zero de Funções

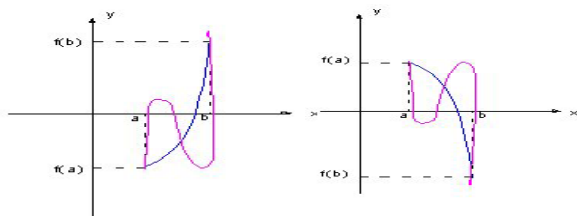
Pelo gráfico, vemos que a função $g(x)$ irá interceptar a função $h(x)$ entre $\pi/2$ e π e entre $3\pi/2$ e 2π . Portanto, podemos afirmar que existe uma raiz de $f(x)$ no intervalo $[\pi/2, \pi]$ e no intervalo $[3\pi/2, 2\pi]$.

Porém, nem sempre o esboço gráfico é a forma mais prática de se obter um intervalo que contém pelo menos uma raiz da função $f(x)$. Muitas vezes é preciso se utilizar um método algébrico. Para isso, vamos recorrer ao teorema de Bolzano.

Zero de Funções

Teorema de Bolzano

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, tal que, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então a função $f(x)$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[a, b]$.



Exercícios

Seja a função $f(x) = x - \ln(x) - 3,2$. Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x de forma a descobrir o intervalo de uma raiz.

X	1	2	3	4	5
F(x)	-2,2	-1,89	-1,29	-0,58	0,19

Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo $[4, 5]$.

Exercícios

Determine o intervalo para pelo menos uma raiz das seguintes funções utilizando Bolzano:

- 1) $x^3 - 9x + 3$
- 2) $x^3 - 2x^2 + 2x$
- 3) $\sqrt{x} - 5 \cdot e^{-x}$
- 4) $x \cdot \log x - 1$

Zero de Funções

Método da Dicotomia ou Bisseção

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, e α uma raiz de $f(x)$ isolada neste intervalo.

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ e } \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

Inicialmente, subdividimos este intervalo em suas duas metades, e verificamos se a raiz está contida na primeira ou na segunda metade do intervalo inicial, usando o teorema de Bolzano.

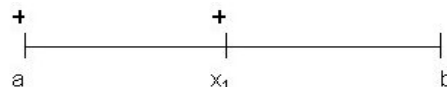
Zero de Funções

Método da Dicotomia ou Bissecção

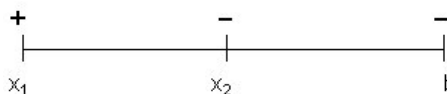
Repetimos o processo para aquela metade que contém a raiz de $f(x)$. Como todo processo numérico, é importante estimarmos o erro nesse resultado obtido.

No caso do método da bissecção, o erro na estimativa será dado pela metade do comprimento do intervalo em estudo.

Zero de Funções



$$x_1 = \left(\frac{a + b}{2} \right) \pm \frac{|b - a|}{2}$$



$$x_2 = \left(\frac{x_1 + b}{2} \right) \pm \frac{|b - x_1|}{2}$$

Exercícios

Determine uma raiz para a função $f(x) = e^x + x$ considerando um erro menor ou igual a 0,05.

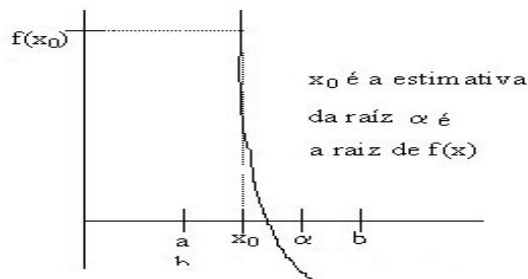
-	+	+	$f(-1) = -0,63$	$x_1 = -0,5 \pm 0,5$
			$f(0) = 1$	
-1	-0,5	0	$f(-0,5) = 0,11$	

-	-	+	$f(-0,75) = -0,28$	$x_2 = -0,75 \pm 0,25$
-1	-0,75	-0,5		

		...		
-	-	+	$f(-0,594) = -0,04$	$x_3 = -0,594 \pm 0,032$
-0,625	-0,594	-0,563		

Exercícios

Critério de parada: $\frac{|b_k - a_k|}{2} \leq \text{erro estipulado}$



Exercícios

Estimativa do número de iterações k :

$$|b_k - a_k| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^k} \text{ e } \frac{|b_k - a_k|}{2} \leq \varepsilon \quad \log 2\varepsilon \geq \frac{|b_0 - a_0|}{2^k}$$

$$2^{k+1} \geq \frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \log(2^{k+1}) \geq \log\left(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon}\right)$$

$$k \geq \frac{\log(|b_0 - a_0|) - \log \varepsilon}{\log(2)} - 1$$

Método das Aproximações Sucessivas

Também chamado de Método de Iteração Linear (MIL)

O método da iteração linear é um processo iterativo que apresenta vantagens e desvantagens em relação ao método da bissecção.

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz de $f(x)$. O Método de Iteração Linear inicia-se reescrevendo a função $f(x)$ como,

$$f(x) = \varphi(x) - x \text{ então, para } f(x) = 0, \text{ teremos que:}$$

$$f(x) = \varphi(x) - x = 0 \text{ e } \varphi(x) = x$$

ou seja, no ponto x que corresponde à raiz de $f(x)$, ao substituirmos o valor de x na função $\varphi(x)$, teremos como resultado o próprio valor de x . Portanto, a raiz de $f(x)$ será o **ponto fixo** de $\varphi(x)$.

Método das Aproximações Sucessivas

Por exemplo, a função $f(x) = x^2 - x - 2$ pode ser reescrita como,

$$f(x) = x^2 - 2 - x = \varphi(x) - x, \text{ onde } \varphi(x) = x^2 - 2.$$

Portanto, para encontrarmos a raiz de $f(x)$, podemos encontrar o valor numérico que ao substituirmos em $\varphi(x)$ retorna o próprio valor de x . Para encontrarmos esse valor de x , vamos utilizar um processo iterativo, onde começamos a calcular o valor de $\varphi(x)$ com um valor inicial de x , e recalculamos repetidamente o valor de $\varphi(x)$ sempre usando o resultado de uma dada iteração como a nova estimativa de x , ou seja, fazendo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (4.17)$$

onde, k é a ordem da iteração em que estamos ($k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$).
A função $\varphi(x)$ é chamada de função de iteração.

Método das Aproximações Sucessivas

Pode-se notar que dada uma função $f(x)$ existem diversas funções de iteração que podem ser usadas no processo.

Exemplo: Encontre algumas funções de iteração a partir de

$$f(x) = x^2 + \ln(x) - x + 1.$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$f(x) = x^2 + \ln(x) - x + 1$$

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 = 0$$

$$x = x^2 + \ln(x) + 1$$

$$\therefore \varphi(x) = x^2 + \ln(x) + 1$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 = 0$$

$$\ln(x) = x - x^2 - 1$$

$$x = e^{(x-x^2-1)}$$

$$\therefore \varphi(x) = e^{(x-x^2-1)}$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 = 0$$

$$x \cdot x = x - \ln(x) - 1 \quad + x$$

$$x = \frac{x - \ln(x) - 1}{x}$$

$$\therefore \varphi(x) = \frac{x - \ln(x) - 1}{x}$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 + \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x = \cos x - x^2 - \ln(x) + x - 1$$

$$x = \text{arc cos}(\cos x - x^2 - \ln(x) + x - 1)$$

$$\therefore \varphi(x) = \text{arc cos}(\cos x - x^2 - \ln(x) + x - 1)$$

Método das Aproximações Sucessivas

Exemplo: Encontre uma estimativa para a raiz de :

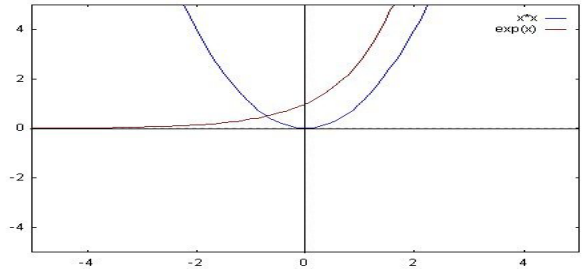
$$f(x) = x^2 - e^x$$

usando o método da iteração linear.

Método das Aproximações Sucessivas

Vamos iniciar a solução encontrando uma boa estimativa inicial para o valor da raiz de $f(x)$. Para isso, vamos usar o método gráfico para o isolamento de raízes. Escrevendo:

$$f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow g(x) = x^2 \text{ e } h(x) = e^x$$



Método das Aproximações Sucessivas

A partir do esboço gráfico acima, conclui-se que a raiz encontra-se no intervalo $[-1, 0]$. Devemos agora escolher uma função de iteração $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - e^x &= 0 \\ x &= \pm \sqrt{e^x} \end{aligned}$$

Método das Aproximações Sucessivas

Usando $\varphi(x) = -\sqrt{e^x}$ e $x_0 = -1$, temos :

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \rightarrow \varphi(x_0) = \varphi(-1) = -\sqrt{e^{-1}} = -0,606 \\ x_1 &= -0,606 \rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(-0,606) = -\sqrt{e^{-0,606}} = -0,738 \\ x_2 &= -0,738 \rightarrow \varphi(x_2) = \varphi(-0,738) = -\sqrt{e^{-0,738}} = -0,691 \\ x_3 &= -0,691 \rightarrow \varphi(x_3) = \varphi(-0,691) = -\sqrt{e^{-0,691}} = -0,707 \\ x_4 &= -0,707 \end{aligned}$$

Método das Aproximações Sucessivas

Substituindo os valores de x_k em $f(x)$ para cada iteração k , vemos que a cada etapa nos aproximamos mais da raiz de $f(x)$, pois o valor dessa função fica mais próximo de zero a cada iteração:

x	$f(x) = x^2 - e^x$
-1	0,632
-0,606	-0,178
-0,738	0,067
-0,691	-0,024
-0,707	0,007

Convergência no MIL

A cada iteração podemos nos aproximar ou nos afastar da solução real. Portanto, antes de resolver um problema através desse método é preciso se verificar se haverá ou não a convergência:

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ e α uma raiz de $f(x)$ contida em $[a, b]$. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração obtida a partir de $f(x)$.

Se:

- $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ forem contínuas em $[a, b]$;
- $|\varphi'(x)| < 1$ (para todo) $\forall x \in [a, b]$;
- $x_0 \in [a, b]$.

Então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

Método das Aproximações Sucessivas

Exemplo: Deseja-se encontrar a raiz de $f(x) = x^2 + 0,96x - 2,08$
Para isto, pretende-se usar uma das seguintes funções de iteração:

$$\varphi_1(x) = \frac{2,08}{x + 0,96}$$

$$\varphi_2(x) = x^2 + 1,96x - 2,08$$

Vamos iniciar verificando a condição (i) para a função $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = \frac{2,08}{x + 0,96}$$

$$\varphi_1(x) = 2,08 \cdot (x + 0,96)^{-1}$$

$$\varphi_1'(x) = 0 \cdot (x + 0,96)^{-1} - 2,08 \cdot (x + 0,96)^{-2} \cdot 1$$

$$\varphi_1'(x) = -\frac{2,08}{(x + 0,96)^2}$$

Ambas as funções $\varphi_1(x)$ e $\varphi_1'(x)$ são contínuas $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x \neq -0,96$.

Método das Aproximações Sucessivas

Em seguida, vamos verificar a condição (ii) para $\varphi_1(x)$.

$$|\varphi_1'(x)| < 1$$

$$\left| -\frac{2,08}{(x + 0,96)^2} \right| < 1$$

$$\frac{|-2,08|}{|(x + 0,96)^2|} < 1$$

$$\frac{2,08}{(x + 0,96)^2} < 1$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$2,08 < (x + 0,96)^2$$

$$2,08 < x^2 + 1,92x + 0,9216$$

$$x^2 + 1,92x + 0,9216 > 2,08$$

$$x^2 + 1,92x - 1,1584 > 0$$

a condição (ii) do teorema da convergência é satisfeita.

Método das Aproximações Sucessivas

Vamos encontrar as raízes da função acima ($x^2 + 1,92x - 1,1584$) e, como ela se trata de uma parábola com concavidade para cima, sabemos que a função será positiva para valores menores que a raiz de menor valor (x_1) e valores maiores que a raiz de maior valor (x_2), como ilustrado a seguir:



Método das Aproximações Sucessivas

As raízes da função são:

$$x^2 + 1,92x - 1,1584 = 0$$

$$\Delta = 8,32$$

$$x = \frac{-1,92 \pm \sqrt{8,32}}{2} =$$

$$x_1 = -2,40$$

$$x_2 = 0,48$$

Portanto:

$|\varphi_1'(x)| < 1$ para $x < -2,40$ ou $x > 0,48$.

Finalmente, concluímos que as condições (i)

e (ii) do Teorema de Convergência são

satisfeitas por:

$$\varphi_1(x) = \frac{2,08}{x + 0,96} \text{ no intervalo } [1,2].$$